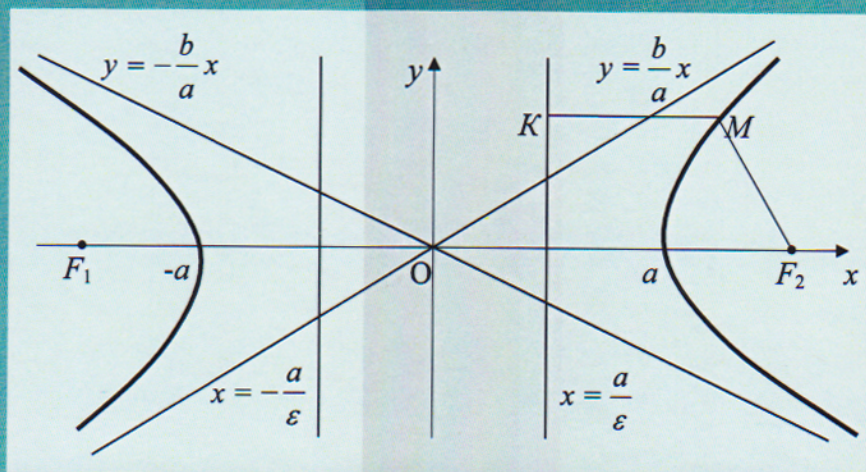


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. М. УЛИТИН

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



ДОНЕЦК - 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Г. М. Улитин

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для студентов образовательных учреждений
высшего профессионального образования

*С благодарностью за
творческое сотрудничество
с Библиотекой ДонНТУ*



Донецк
2018

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Элементы линейная алгебра	4
Тема: Определители	4
Определители второго и третьего порядков	4
Основные свойства определителей	5
Вычисление определителей	6
Тема: Системы линейных алгебраических уравнений	7
Правило Крамера	7
Метод Гаусса	10
Тема: Матрицы	12
Основные виды матриц	12
Действия над матрицами	13
Обратная матрица	15
Решение систем уравнений с помощью обратной матрицы	16
Векторная алгебра	18
Тема: Векторы	18
Определение вектора	18
Линейные операции над векторами	18
Декартова система координат	20
Способы задания векторов	21
Деление отрезка в заданном отношении	22
Тема: Скалярное произведение	23
Скалярное произведение и его основные свойства	23
Скалярное произведение векторов, заданных координатами	23
Длина вектора. Угол между двумя векторами.	24
Направляющие косинусы	24
Тема: Векторное произведение	25
Векторное произведение двух векторов и его основные свойства	25
Векторное произведение векторов, заданных координатами	25
Тема: Смешанное произведение векторов	26
Смешанное произведение векторов и его основные свойства	26
Смешанное произведение векторов, заданных координатами	27
Аналитическая геометрия	29
Тема: Линии на плоскости и их уравнения	29
Линии и их уравнения в декартовой системе координат	29
Параметрические уравнения линии	29
Уравнение линии в полярной системе координат	30
Тема: Прямая линия на плоскости	31
Уравнения прямой линии	31
Угол между двумя прямыми	32
Взаимное расположение двух прямых	33
Уравнение прямой, проходящей через две точки	34
Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом	34
Расстояние от точки до прямой	34
Тема: Линии второго порядка	35
Эллипс	35
Гипербола	37
Парабола	39

Тема : Плоскость	40
Уравнение плоскости	40
Уравнение плоскости, проходящей через точку, перпендикулярно вектору	41
Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки	41
Угол между двумя плоскостями	42
Расстояние от точки до плоскости	42
Тема : Прямая в пространстве	43
Уравнения прямой линии	43
Угол между двумя прямыми	44
Взаимное расположение двух прямых	44
Уравнение прямой, проходящей через две точки	45
Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом	45
Расстояние от точки до прямой	46
Тема : Поверхности	47
Уравнение поверхности	47
Поверхности второго порядка	47
Введение в анализ функции одной переменной	51
Тема : Функции	51
Определение функции	51
Способы задания функции	52
Элементарные функции	54
Тема : Пределы	54
Предел последовательности и переменной величины	54
Предел функции	57
Бесконечно малые и бесконечно большие величины	58
Теорема о пределе функции	59
Основные теоремы о пределах	60
Раскрытие неопределенностей	61
Первый замечательный предел	62
Число e . Второй замечательный предел	62
Сравнение бесконечно малых величин	64
Тема : Непрерывность	65
Определение непрерывной функции	65
Непрерывность элементарных функций	66
Классификация точек разрыва	67
Свойство функций, непрерывных на отрезке	68
Дифференциальное исчисление	69
Тема : Производная и дифференциал. Производные высших порядков	69
Производная функции	69
Производные основных элементарных функций	70
Механический смысл производной	71
Геометрический смысл производной	71
Правила дифференцирования	72
Производная сложной функции	73
Производная функции, заданной параметрическими уравнениями	74
Производная функции, заданной неявно	74

Производная степенно-показательной функции	75
Дифференциал функции	75
Производные высших порядков	77
Тема : Основные теоремы	
о дифференцируемых функциях	78
Теорема Ролля	78
Теорема Лагранжа	79
Правило Лопиталя	79
Формула Тейлора	81
Тема : Исследование функций	82
Возрастание и убывание функций	82
Экстремум функции. Необходимые условия экстремума	83
Достаточные условия экстремума	84
Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке	85
Выпуклость, вогнутость функции и точки перегиба	86
Асимптоты линий	87
Общий план исследования функции и построение графиков	88
Интегральное исчисление	91
Тема : Неопределенный интеграл	91
Первообразная и неопределенный интеграл	91
Основные свойства неопределённого интеграла	92
Таблица неопределённых интегралов	93
Элементарные преобразования подынтегральной функции	94
Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен	96
Интегрирование по частям	97
Многочлены и рациональные дроби	100
Интегрирование рациональных дробей	102
Интегрирование некоторых тригонометрических функций	105
Интегрирование некоторых иррациональных функций	108
Понятие о неберущихся интегралах	109
Тема : Определенный интеграл	110
Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла	110
Определение определённого интеграла	111
Основные свойства определённого интеграла	113
Интеграл как функция верхнего предела	116
Формула Ньютона – Лейбница	117
Замена переменной в определённом интеграле	118
Интегрирование по частям в определённом интеграле	119
Тема : Приложения определенного интеграла	120
Площадь плоской фигуры	120
Длина дуги плоской кривой	123
Площадь поверхности тела вращения	125
Вычисление объёма тела по площадям поперечных сечений	126
Приложения определённого интеграла к некоторым	

задачам практики	127
Тема : Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода).	128
Функции нескольких переменных	131
Тема: Определение ФНП и частных производных	131
Предел и непрерывность функции двух переменных	132
Частные производные функции двух переменных	132
Полный дифференциал функции двух переменных	133
Производная сложной функции	134
Полная производная	135
Частные производные высших порядков	135
Тема :Производная направлению. Градиент	136
Производная по направлению	136
Градиент	137
Касательная и нормаль к поверхности	139
Тема : Экстремум функции нескольких переменных	140
Необходимые условия экстремума	140
Достаточные условия экстремума	141
Нахождение наибольшего и наименьшего значений в замкнутой области	141
Условный экстремум	143
Метод наименьших квадратов	146
Дифференциальные уравнения	148
Тема : Введение	148
Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям	148
Определение дифференциального уравнения	149
Тема : Дифференциальные уравнения первого порядка	150
Общие понятия	150
Уравнения с разделяющимися переменными	151
Однородные дифференциальные уравнения	153
Линейные дифференциальные уравнения .первого порядка	155
Дифференциальные уравнения Бернулли	156
Тема : Дифференциальные уравнения высших порядков	157
Определение дифференциального уравнения n -го порядка	157
Уравнения, допускающие понижение порядка	158
Тема : Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	160
Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (ЛОДУ-2). Определитель Вронского	160
Теорема о структуре общего решения ЛОДУ-2	161
ЛОДУ-2 с постоянными коэффициентами	162
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка	165
Метод вариации произвольных постоянных	166
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью	168
Тема : Линейные дифференциальные уравнения высших порядков	172
Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка	172
Тема : Системы дифференциальных уравнений	176
Нормальные системы	176
Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключений.	178

Ряды	181
Тема: Числовые ряды. Необходимый признак сходимости	181
Числовой ряд и его сумма	181
Необходимый признак сходимости.	183
Тема: Достаточные признаки сходимости рядов	
с положительными членами	183
Признаки сравнения	183
Признак Даламбера	185
Радикальный признак Коши	185
Интегральный признак Коши	186
Тема: Знакопеременные ряды	187
Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница	187
Абсолютная и условная сходимость	188
Тема: Функциональные ряды	189
Определение функционального ряда	189
Равномерная сходимость функциональных рядов	189
Тема: Степенные ряды	190
Определение степенного ряда. Теорема Абеля	190
Разложение функций в степенные ряды	192
Применение рядов Тейлора	194
Тема: Ряды Фурье	195
Определение ряда Фурье	195
Условия разложения функций в ряд Фурье	196
Ряд Фурье для функций с периодом $T = 2l$	198
Ряды Фурье для четных и нечетных функций	199
Разложение непериодических функций в ряд Фурье	201
Интеграл Фурье	202
Уравнения математической физики	203
Основные типы уравнений математической физики	203
Решение волнового уравнения методом Фурье	203
Решение уравнения теплопроводности методом Фурье	206
Кратные интегралы	209
Тема: Двойной интеграл	209
Определение двойного интеграла	209
Вычисление двойного интеграла	210
Замена переменных в двойном интеграле	212
Двойной интеграл в полярной системе координат	213
Приложения двойного интеграла:	214
Тема: Тройной интеграл	218
Определение и вычисление тройного интеграла	218
Замена переменных в тройном интеграле	219
Приложения тройного интеграла:	221
Тема: Криволинейные интегралы	223
Криволинейные интегралы первого рода или по длине дуги	223
Вычисление криволинейных интегралов первого рода	224
Вычисление длины дуги	225
Тема: Криволинейные интегралы второго рода или по координатам	225

Вычисление криволинейного интеграла второго рода	226
Вычисление работы силы	226
Формула Грина	227
Теория вероятностей	228
Тема : Общие понятия	228
Предмет теории вероятностей	228
Пространство элементарных событий	228
Операции над событиями	229
Статистический подход к понятию вероятности	231
Элементы комбинаторики	232
Классическое определение вероятности	233
Тема : Основные теоремы теории вероятностей	234
Теорема умножения вероятностей	234
Теорема сложения вероятностей	236
Формула полной вероятности	237
Формула Байеса	237
Тема : Повторение испытаний	238
Независимые испытания. Формула Бернулли	238
Локальная теорема Муавра-Лапласа	240
Интегральная теорема Лапласа	241
Теорема Пуассона	242
Тема : Случайные величины и функции распределения.	242
Случайные величины	242
Функция распределения вероятностей для дискретной СВ	244
Функция распределения вероятностей для непрерывной СВ.	245
Функция плотности распределения вероятностей для непрерывной СВ	245
Тема : Числовые характеристики случайной величины	247
Математическое ожидание СВ	247
Дисперсия и среднее квадратическое отклонение СВ.	249
Тема : Основные законы распределения случайных величин	251
Законы распределения дискретных СВ.	251
Законы распределения непрерывных СВ	252
Тема : Закон больших чисел	257
Неравенство Чебышева	257
Теорема Чебышева	257
Элементы математической статистики	259
Введение. Предмет математической статистики	260
Тема : Статистические законы распределения выборки.	260
Вариационный ряд	261
Полигон и гистограмма	261
Тема : Статистические оценки параметров распределения.	264
Точечные оценки	264
Интервальные оценки	266
Теория функций комплексной переменной	267
Тема : Определение функции комплексной переменной	267
Комплексные числа и действия над ними	267

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа	267
Определение функции комплексной переменной	269
Предел и непрерывность функции комплексной переменной	271
Тема: Ряды с комплексными членами	272
Числовые ряды	272
Степенные ряды	273
Основные элементарные функции комплексной переменной	273
Тема: Производная функции комплексной переменной	275
Определение производной	275
Гармонические функции	276
Тема: Интеграл от функции комплексной переменной	277
Определение интеграла	277
Основная теорема Коши	278
Интегральная формула Коши	279
Производные высших порядков от аналитической функции	279
Ряд Тейлора	279
Операционное исчисление	281
Тема: Оригинал и изображение	281
Определение оригинала и изображения	281
Изображения некоторых функций	281
Тема: Основные теоремы операционного исчисления	283
Теоремы подобия, запаздывания и смещения	283
Теорема о дифференцировании оригинала	285
Теорема о дифференцировании изображения	285
Теорема об интегрировании оригинала	285
Теорема об интегрировании изображения	286
Тема: Приложения операционного исчисления	286
Решение линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами	286
Приложение операционного исчисления к задачам техники	289